آزمون جامع (۱)

۱. گزینهٔ «۴»

با توجه به رابطهٔ $|u|=a \Leftrightarrow u=\pm a$ داریم:

$$|x-1|-2=\pm 1 \Rightarrow |x-1|=2\pm 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x-1|=3 \Rightarrow x-1=\pm 3 \Rightarrow x=1\pm 3 \\ |x-1|=1 \Rightarrow x-1=\pm 1 \Rightarrow x=1\pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4,-2 \\ x=2,0 \end{cases}$$

پس معادله دارای ۴ ریشه است.

۲. گزینهٔ «۲»

روش اول:

$$|1-x^2|<|1+x| \Rightarrow |1-x||1+x|<|1+x|$$

با فرض این‌که $x\neq -1$ باشد، عبارت $|1+x|$ همواره مثبت بوده و با تقسیم بر $|1+x|$ داریم:

$$|1-x|<1 \xrightarrow{|u|<a \Leftrightarrow -a<u<a} -1<1-x<1$$

$$\xrightarrow{-1} -2<-x<0 \Rightarrow 0<x<2$$

روش دوم: **عدد گذاری**، با توجه به گزینه‌ها ابتدا $x=\frac{-1}{2}$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$$|1-(-\frac{1}{2})^2|<|1-\frac{1}{2}| \Rightarrow |1-\frac{1}{4}|<|\frac{1}{2}| \Rightarrow$$

$$\frac{3}{4}<\frac{1}{2} \Rightarrow 6<4 \longrightarrow \text{غ ق ق}$$

پس $x=-\frac{1}{2}$ جزء جواب‌ها نیست، لذا گزینه‌های ۳ و ۴ حذف می‌شوند. برای انتخاب گزینه صحیح $x=2/5$ را بررسی می‌کنیم:

$$|1-(2/5)^2|<|1+2/5| \Rightarrow 5/25<3/5 \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

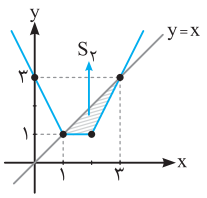
پس $x=2/5$ هم جزء جواب‌ها نبوده و در نتیجه گزینه (۱) هم حذف می‌شود.

۳. گزینهٔ «۱»

طبق نکات درسنامه کافی است مقدار تابع را به ازای xهای داخل قدرمطلق و قبل و بعد از ریشه‌ها را به دست آورده و سپس تابع را رسم نماییم.

$$y=|\underbrace{x-1}_{x=1}|+|\underbrace{x-2}_{x=2}| \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

حال شکل تابع را رسم می‌کنیم و سپس خط $y=x$ (نیم‌ساز ناحیهٔ اول و سوم) را هم رسم می‌کنیم.



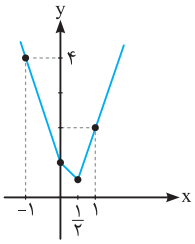
با توجه به شکل رسم شده، مساحت خواسته‌شده همان ناحیهٔ هاشورزده شده است که مثلثی به قاعدهٔ ۳ و ارتفاع ۱ است، پس:

$$S=\frac{1\times 2}{2}=1$$

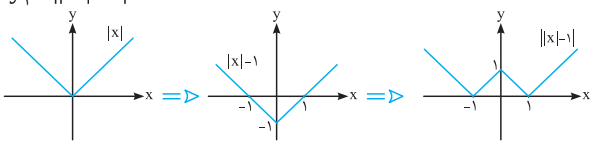
۴. گزینهٔ «۴»

کافی است نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم نموده و تعداد نقاط تلاقی آن‌ها را بیابیم.

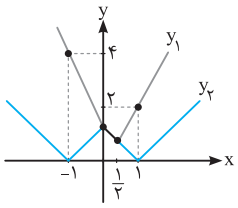
$$y_1=|\underbrace{2x-1}_{x=\frac{1}{2}}|+|\underbrace{x}_{x=0}| \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} x & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline y & 4 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{array} \Rightarrow$$



$$y_2=||x|-1| \Rightarrow$$



حال نمودار هر دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



پس نمودارهای تابع در بی‌شمار نقطه همدیگر را قطع می‌کنند و معادله بی‌شمار ریشه دارد.

۵. گزینهٔ «۱»

روش اول:

$$|\frac{2x-1}{x+3}|<\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{|2x-1|}{|x+3|}<\frac{3}{2} \overset{x\neq -3}{\Rightarrow} 2|2x-1|<3|x+3|$$

$$\xrightarrow{\text{به توان دو}} 4(2x-1)^2<9(x+3)^2$$

$$\Rightarrow 4(4x^2-4x+1)<9(x^2+6x+9)$$

$$\Rightarrow 16x^2-16x+4<9x^2+54x+81$$

$$\Rightarrow 7x^2-70x-77<0$$

$$\xrightarrow{\div 7} x^2-10x-11<0 \Rightarrow (x-11)(x+1)<0$$

$$\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} -1<x<11$$

روش دوم: عددگذاری

۶. گزینهٔ «۳»

در حل نامعادلات از عبارت‌های مثبت می‌توان صرف نظر کرد، پس:

$$(\underbrace{|x-1|+3}_{\text{همواره مثبت}})(|x-1|-2)<0 \Rightarrow |x-1|-2<0 \Rightarrow |x-1|<2$$

$$\Rightarrow -2<x-1<2 \xrightarrow{+1} -1<x<3$$

روش دوم: عددگذاری

۷. گزینهٔ «۳»

روش اول:

$$|\underbrace{\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x}}_{u}|>\underbrace{\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x}}_{u} \Rightarrow |u|>u$$

پس برای برقراری نامساوی فوق u باید منفی باشد، پس:

$$\frac{۱}{x+۱}-\frac{۳}{x}<۰\Rightarrow\frac{x-۳x-۳}{x(x+۱)}<۰\Rightarrow\frac{-۲x-۳}{x(x+۱)}<۰$$

حال جدول تعیین علامت را می‌کشیم:

x		$-\frac{۳}{۲}$		-۱		۰	
	+	۰	−	ت ن	+	ت ن	−
			جواب				جواب

$$\Rightarrow(-\frac{۳}{۲}<x<-۱)\cup(x>۰)$$

روش دوم: عددگذاری

۸. گزینهٔ «۲»

با توجه به رابطهٔ $|u|=|V|\Leftrightarrow u=\pm V$ داریم:

$$\begin{cases}\cancel{x^۲}-\cancel{۲x}-۱=+(\cancel{x^۲}-\cancel{۲x}+۳)\Rightarrow -۱=۳\rightarrow \text{غ ق ق}\\ x^۲-۲x-۱=-(x^۲-۲x+۳)\Rightarrow ۲x^۲-۴x+۲=۰\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow(x-۱)^۲=۰\Rightarrow x=۱$$

پس معادله دارای ریشهٔ مضاعف $x=۱$ است.

۹. گزینهٔ «۲»

$$\begin{cases}x>۲\Rightarrow\frac{۱}{x-۲}=x-۲\Rightarrow(x-۲)^۲=۱\Rightarrow x-۲=\pm۱\\ \qquad\qquad\qquad\Rightarrow x=۲\pm۱\xrightarrow{x>۲}x=۳\\ x<۲\Rightarrow\frac{۱}{x-۲}=-(x-۲)\Rightarrow(x-۲)^۲=-۱\rightarrow \text{غ ق ق}\end{cases}$$

پس معادله فقط یک جواب $x=۳$ دارد.

۱۰. گزینهٔ «۳»

با توجه به این‌که در سمت راست تساوی ضریب x برابر ۳ است لذا باید هر سه عبارت سمت چپ مثبت باشند تا xهای هر سه عبارت با هم جمع‌شده و ۳x را تولید کند، پس هر سه عبارت داخل قدرمطلق‌ها به ازای $x\geq۳$ مثبت می‌باشند.

$$x\geq۳\Rightarrow x-۲+x+۴+x-۳=۳x-۱$$

آزمون جامع (۲)

۱. گزینهٔ «۱»

کافی است ضابطهٔ تابع را ساده کنیم، تا اینکه ببینیم کدام گزینه حاصل می‌شود. چون وقتی نمودار دو تابع برهم منطبق می‌شوند، دارای بی‌شمار جواب است.

		۰		۱	
$x-1$	$-$		$-$	۰	$+$
x	$-$	۰	$+$		$+$

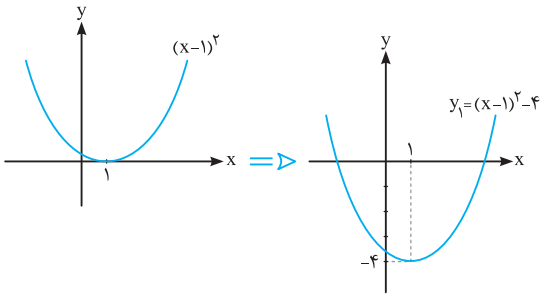
$$\begin{cases} x\le 0 \Rightarrow y=-2(x-1)-x \Rightarrow y=-3x+2 \\ 0\le x\le 1 \Rightarrow y=-2(x-1)+x \Rightarrow y=-x+2 \\ x\ge 1 \Rightarrow y=2(x-1)+x \Rightarrow y=3x-2 \end{cases}$$

پس برای $0\le x\le 1$ ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=2-x$ در می‌آید که برگزینهٔ (۱) منطبق می‌شود و در نتیجه معادله دارای بی‌شمار جواب است.

۲. گزینهٔ «۴»

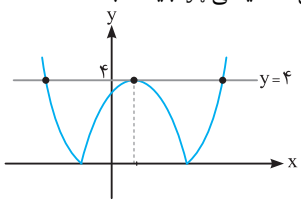
کافی است نمودار تابع را رسم کرده تا خط y_0 را به‌دست آوریم:

$$y_1=x^2-2x-3=x^2-2x+\underbrace{1-4}_{-3}=(x-1)^2-4$$



حال نمودار تابع $y=|x^2-2x-3|$ که همان $y=|y_1|$ است را رسم می‌کنیم.

پس با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم که خط $y=4$ نمودار تابع را در سه نقطه قطع می‌کند، یعنی y_0 باید ۴ باشد.



۳. گزینهٔ «۴»

کافی است نامعادله را به ازای $x\ge 0$ و $x<0$ حل نماییم:

$$\begin{cases} x\ge 0 \Rightarrow |x|=x \\ x<0 \Rightarrow |x|=-x \end{cases}$$

حال نامعادله را ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\ge 0 \Rightarrow x+2x<15+\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}x<15 \\ \Rightarrow x<6 \xrightarrow{x\ge 0} 0\le x<6 \qquad (1) \\ \text{یا} \\ x<0 \Rightarrow x+2(-x)<15+\frac{x}{2} \Rightarrow -\frac{3x}{2}<15 \\ \Rightarrow -x<10 \Rightarrow x>-10 \xrightarrow{x<0} -10<x<0 \qquad (2) \end{cases}$$

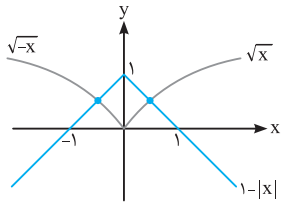
$$\xrightarrow{(1)\cup(2)} -10<x<6 \Rightarrow (a,b)=(-10,6)$$

$$\Rightarrow a+b=-10+6=-4$$

۴. گزینهٔ «۲»

کافی است نمودارهای دو تابع را رسم نماییم:

پس در دو نقطه مشترک می‌باشند.



۵. گزینهٔ «۲»

باید هر ۴ گزینه را حل نماییم:

$$1)\ ||x|-1|=5 \Rightarrow |x|-1=\pm 5 \Rightarrow |x|=1\pm 5 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} |x|=-4 \rightarrow \text{غ ق ق} \\ |x|=6 \Rightarrow x=\pm 6 \rightarrow \text{۲ ریشه} \end{cases}$$

$$2)\ |x^2-2|=2 \Rightarrow x^2-2=\pm 2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-2=2 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \\ x^2-2=-2 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0 \end{cases} \rightarrow \text{۳ ریشه}$$

$$3)\ x|x|=-4 \xrightarrow{x<0} x(-x)=-4 \Rightarrow x^2=4 \xrightarrow{x<0} x=-2$$

برای گزینهٔ (۴) هم با رسم نمودارش متوجه می‌شویم که دارای ۲ ریشه است. پس گزینهٔ (۲) ریشه‌های بیشتری دارد.

۶. گزینهٔ «۱»

می‌دانیم که $(x-1)^2=|x-1|^2$ است، پس با جمع دو طرف نامعادله با عدد یک داریم:

$$x^2-2x+1-|x-1|\le 2 \Rightarrow (x-1)^2-|x-1|-2\le 0 \Rightarrow$$

$$|x-1|^2-|x-1|-2\le 0 \Rightarrow (|x-1|-2)(\underbrace{|x-1|+1}_{\text{همواره مثبت}})\le 0$$

$$\Rightarrow |x-1|-2\le 0 \Rightarrow |x-1|\le 2$$

۷. گزینهٔ «۴»

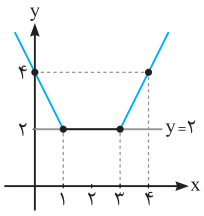
روش اول:

$$\frac{3-|x-1|}{\underbrace{1+|x-3|}_{\text{همواره مثبت}}}\ge 1 \Rightarrow 3-|x-1|\ge 1+|x-3|$$

$$\Rightarrow 2\ge \underbrace{|x-1|+|x-3|}_{y_1} \quad (1)$$

حال نمودار تابع y_1 را رسم می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} x & 0 & 1 & 3 & 4 \\ \hline y_1 & 4 & 2 & 2 & 4 \end{array}$$



با توجه به شکل، نمودار تابع همواره بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است که فقط نامعادلهٔ (۱) برای مساوی با ۲ برقرار است که جواب، بازهٔ [۱,۳] است.

روش دوم: عددگذاری

۸. گزینهٔ «۲»

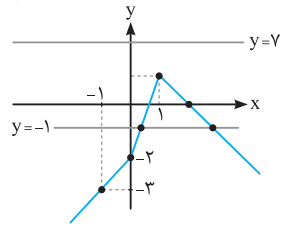
با توجه به رابطهٔ $|u|=a \xleftrightarrow{a>0} u=\pm a$ داریم:

$$||\underbrace{|x|-|2x-2|-3}_{u}|=4 \Rightarrow |x|-|2x-2|-3=\pm 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x|-|2x-2|=7 \\ |x|-|2x-2|=-1 \end{cases}$$

کافی است نمودار تابع $y_1=|x|-|2x-2|$ را رسم کرده و با خطوط $y=-1$ و $y=7$ تلاقی دهیم:

x	-1	0	1	2
y_1	-3	-2	1	0

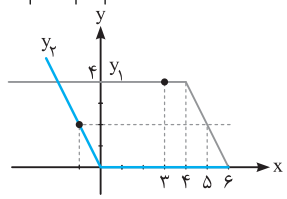


فقط خط $y=-1$ نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند، پس معادله دارای ۲ ریشه است.

۹. گزینهٔ «۳»

$$y_1=8-x-|x-4| \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} x & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline y_1 & 4 & 4 & 2 & 0 \end{array}$$

$$y_2=|x|-x \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & 2 & 0 & 0 \end{array}$$



با توجه به شکل، قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع ۶ و ارتفاع آن ۴ می‌باشد و مساحت آن:

$$S=6\times 4=24$$

۱۰. گزینهٔ «۳»

روش اول:

$$|x-1|<2 \Rightarrow -2<(x-1)<2 \xrightarrow{+1} -1<x<3 \quad (1)$$

$2x-5<|x-2|$:

$$\begin{cases} x\geq 2 \Rightarrow 2x-5<x-2 \Rightarrow x<3 \xrightarrow{\text{شرط } x\geq 2} 2\leq x<3 & (2) \\ x<2 \Rightarrow 2x-5<-x+2 \Rightarrow x<\frac{7}{3} \xrightarrow{\text{شرط } x<2} x<2 & (3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(2)\cup(3)} x<3 \quad (4)$$

جواب نهایی: $(1)\cap(4)=(-1,3)$

روش دوم: عدد گذاری